

Дорофеев Ю. И., доктор технических наук, доцент,  
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»  
Любчик Л. М., доктор технических наук, профессор,  
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»  
Никульченко А. А.,  
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

## ОПТИМАЛЬНОЕ ГАРАНТИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ В ЦЕПЯХ ПОСТАВОК С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ВРЕМЕННЫМИ ЗАДЕРЖКАМИ

**Аннотация.** Предложен подход к решению задачи синтеза управления запасами для производственных систем с неопределенными задержками пополнения запасов в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и наличия ограничений на размеры заказов. Использование второго метода Ляпунова и метода инвариантных эллипсоидов позволило обеспечить робастную устойчивость замкнутой системы, а также гарантированную стоимость полученного управления. С помощью математического аппарата линейных матричных неравенств задача синтеза регулятора сведена к задаче полуопределенного программирования.

**Ключевые слова:** управление запасами, неопределенная временная задержка, гарантирующее управление, метод инвариантных эллипсоидов, линейное матричное неравенство.

**Введение.** Задаче синтеза регуляторов для линейных динамических систем в условиях неопределенных временных задержек уделяется значительное внимание в работах по теории автоматического управления. Поскольку наличие задержек часто является причиной ухудшения качества системы и даже потери устойчивости, множество публикаций посвящено проблемам анализа устойчивости и синтеза регуляторов для непрерывных систем с временными задержками (см. [1] и ссылки в ней). Гораздо меньше внимания уделяется дискретным системам с задержками. Это связано с тем, что дискретные системы могут быть преобразованы путем расширения пространства состояний к виду систем без задержек. Однако, подобное преобразование приводит к увеличению размерности системы, а в случае неопределенности величин задержек является неприменимым.

При синтезе систем управления запасами усилия разработчиков направлены на построение регуляторов, которые не только обеспечивают робастную устойчивость замкнутой системы, но и гарантируют достаточный уровень производительности. Одним из подходов к решению этой задачи является синтез так называемого гарантирующего управления (guaranteed cost control). Преимущество указанного подхода в том, что он позволяет определить верхнее граничное значение заданного критерия качества и, следовательно, разработчик имеет возможность оценить снижение производительности системы, вызванное наличием временных задержек.

Развитие теории линейных матричных неравенств (ЛМН) позволяет применить подобный подход для синтеза оптимального управления запасами в производственных системах с неопределенными задержками пополнения запасов. В частности, с помощью указанного подхода разработаны процедуры синтеза законов управления с обратной связью по состоянию для систем с неопределенными задержками на основе решения модифицированного уравнения Риккати и с использованием техники ЛМН [2]. Однако, в указанных работах не рассматривались внешние возмущения и не учитывались эксплуатационные ограничения, присущие системам производства-хранения-распределения ресурсов. Тогда как использование ЛМН позволяет не только эффективно находить оптимальные решения, но и учитывать различные дополнительные ограничения.

Подход, предложенный в данной работе, заключается в следующем. Вначале формулируется достаточное условие существования закона гарантирующего управления в виде обратной связи по состоянию, а затем доказывается, что это условие эквивалентно

разрешимости некоторого ЛМН. Решение соответствующего ЛМН используется для синтеза гарантирующего управления запасами. Исходя из этого, формулируется задача полуопределенного программирования для нахождения оптимального гарантирующего регулятора, минимизирующего верхнюю границу функции стоимости.

**Целью работы** является синтез системы управления запасами для производственной системы с задержками пополнения запасов, описываемой линейной дискретной моделью в пространстве состояний, которая в условиях неизвестного, но ограниченного спроса на ресурсы и неопределенности величин задержек обеспечивает: 1) робастную устойчивость замкнутой системы при выполнении заданных ограничений на значения управляющих воздействий; 2) гарантированную стоимость управления, которая означает, что значение квадратичного критерия качества для замкнутой системы не превысит некоторого граничного значения.

**Метод решения.** Традиционным средством защиты от неопределенности спроса является создание страховых запасов, размеры которых вычисляются на основе верхних граничных значений спроса с учетом максимально возможных временных задержек.

В качестве управляющих воздействий рассматриваются размеры заявок на поставку ресурсов. Поскольку уровни наличных запасов ресурсов доступны для непосредственного измерения, закон управления строится в виде линейной обратной связи по сигналу рассогласования между наличными и страховыми уровнями запасов ресурсов.

Предложенный подход основан на достаточных условиях робастной устойчивости динамических систем и состоит в построении квадратичной функции Ляпунова (ФЛ). При формировании ФЛ используется разность вектора состояний, компоненты которого определяют наличные уровни запасов ресурсов, и вектора страховых запасов, а также векторы управляющих воздействий с задержкой. Потребуем, чтобы значение ФЛ с течением времени убывало с некоторой скоростью, определяемой значением квадратичного функционала качества, определенного на бесконечном временном горизонте. Тогда верхнее граничное значение критерия качества определяется значением ФЛ, вычисленной в начальный момент времени.

Классический подход к решению задачи синтеза управления, минимизирующего квадратичный критерий качества, основан на решении алгебраического уравнения Риккати и гарантирует оптимальное решение для произвольных начальных условий. Чтобы получить аналогичный результат в условиях неопределенных временных задержек применяется метод инвариантных эллипсоидов [3]. Инвариантные по состоянию эллипсоиды могут рассматриваться в качестве аппроксимации множества достижимости замкнутой системы, то есть позволяют характеризовать влияние внешних возмущений и неопределенности параметров модели на траекторию замкнутой системы. Предложенный способ построения инвариантного эллипсоида замкнутой системы позволяет определить множество, которое находится внутри поверхности уровня введенной ФЛ. Таким образом, задача сводится к построению регулятора, который обеспечивает минимизацию по некоторому критерию инвариантного эллипсоида при заданных ограничениях. В качестве критерия выбрана сумма квадратов полуосей эллипсоида, то есть след его матрицы.

**Выводы.** В работе предложен подход к решению задачи синтеза оптимального гарантирующего управления запасами для производственных систем с неопределенными задержками пополнения запасов в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и наличия ограничений на размеры заказов ресурсов. Подход основан на использовании второго метода Ляпунова и метода инвариантных эллипсоидов. Применение математического аппарата ЛМН позволило свести задачу синтеза регулятора к задаче полуопределенного программирования.

### Литература

1. Zhu X. L., Yang G. H. New results of stability analysis for systems with time-varying delay. International Journal of robust and nonlinear control. 2010. Vol. 20. 596-606.
2. Yua L., Gao F. Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain systems with both state and input delays. Journal of the Franklin Institute. 2001. Vol. 338. 101-110.
3. Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С. Управление линейными системами при внешних возмущениях (техника линейных матричных неравенств). Москва. Ленанд. 2014. 560 с.